TD Limites et continuité

Limites

XX9 **Exercice 1** 🏠 Déterminer les limites suivantes

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ en 0^+
2. $\dfrac{\ln\left(\cosh(\alpha x)\right)}{\ln(\cosh x)}$ en $+\infty$, pour $\alpha > 0$
3. $x \sin \frac{1}{x}$ en $+\infty$

0XF **Exercice 2** 🪶

1. Montrer que $x \ln|\ln x| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. **Indication** : *Utiliser une majoration de* $\ln u$.
2. Déterminer la limite en 0 de $f\colon x \mapsto \frac{|\ln x|^x}{x^{\ln x}}$.
3. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f\colon x \mapsto \frac{|\ln x|^x}{x^{\ln x}}$.

8XF **Exercice 3** Déterminer la limite éventuelle de

1. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en 2
2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $(x-2)\ln(x^3-2x^2+x-2)$ en 2^+

CRJ **Exercice 4** Déterminer les limites suivantes, en faisant apparaître des croissances comparées.

1. $x\ln(x+\sqrt{x})$ en 0^+
2. $\frac{e^x}{x^2 \ln x}$ en $+\infty$
3. $\frac{e^{\sqrt{x}/2}}{x}$ en $+\infty$

ZV9 **Exercice 5** Soit f une fonction réelle telle que $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) - \alpha x \to +\infty$

0PJ **Exercice 6** 🪶 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} (x^n - x^{n+1})$.

… et $\varepsilon > 0$

CZN **Exercice 7** 🪶🏠 Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers a, et $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = b$. En utilisant les définitions des limites, montrer que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

CE9 **Exercice 8** Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ croissante telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

D08 **Exercice 9** 🪶 Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Dans cette question, on suppose f croissante, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   a) Pour $\varepsilon > 0$, justifier que $\left|\int_{1-\frac{\varepsilon}{2}}^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
   b) Montrer que $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. ★ Déterminer la limite, quand $n\to+\infty$, de $\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.
   Indication : *Un résultat de la deuxième partie du chapitre assure que f est bornée.*

W6R **Exercice 10** ★ Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

… et topologie

CCQ **Exercice 11** On dit qu'une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est localement constante si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit constante sur $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Montrer qu'une fonction localement constante est constante.

B01 **Exercice 12** ★ ★ Caractère ouvert de l'ensemble des polynômes scindés à racines simples
Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré d, avec $a_d = 1$.

1. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et P scindé à racines simples, de racines $x_1 < x_2 < \ldots < x_d$.
   Montrer que si Q est un polynôme de degré d suffisamment proche de P, alors Q est scindé à racines simples.
   Ind : *Il s'agit de justifier l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si les coefficients de Q sont proches à ε de ceux de P, Q est sars.*
2. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $M = \sup\limits_{0\leq k\leq d} |a_k|$.
   a) Expliciter une constante K dépendant uniquement de M et d telle que toutes les racines de P soit de module $\leq K$.
   b) Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes unitaires de même degré d tendant (coefficient par coefficient) vers P. On note $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{d,n}$ les racines de Q_n comptées avec multiplicité. Montrer que si aucun des Q_n n'est scindé à racines simples, P n'est pas scindé à racines simples.
   c) En déduire que si P est scindé à racines simples, tout polynôme assez proche de P est scindé à racines simples.

Continuité

M2P **Exercice 13** 🏠 On considère les fonctions $f\colon x \mapsto \sin(x)\sin\frac{1}{x}$ et $g\colon x\mapsto \cos x \cos\frac{1}{x}$.

1. Justifier que f et g sont continues.
2. Sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

58P **Exercice 14** Soient f, g deux fonctions continues.

1. Pourquoi la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est-elle continue ?
2. En déduire que la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est continue.

J3E **Exercice 15** 🪶 Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Justifier l'existence d'un plus petit zéro de f.

HXW **Exercice 16** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est discontinue en tout point.

ESM **Exercice 17** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$
2. Montrer que f est constante.

KUW **Exercice 18** ★ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \sup_{[0,x]} f$ est continue.

Relèvement continu

OLW **Exercice 19**

1. Que dire d'une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$? Justifier.
2. Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{if(t)} = e^{ig(t)}$. Montrer que $f - g$ est constante.

714 **Exercice 20** ★

1. Quels sont les morphismes continus $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ un morphisme continu. Une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{i\tilde{f}(x)}$ est appelé un relèvement de f.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un relèvement continu $\tilde{f}$ de f défini sur $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.
   b) ★ Montrer qu'il existe un unique relèvement continu $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie $\tilde{f}(0) = 0$.
   Ind : *Si $\tilde{f}$ est un relèvement, la question précédente permet de l'étendre.*
   c) Montrer que $\tilde{f}$ est un morphisme de groupe.
   d) En déduire quels sont les morphismes de groupes continus $\mathbb{R} \to \mathbb{U}$.

Fonctions continues

ZN6 **Exercice 21** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[-\infty]{} -\infty$. Montrer que f est surjective.

NKZ **Exercice 22** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique.

1. Justifier brièvement que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0,T],\ f(x) = f(y)$.
2. Montrer que f admet un minimum.

JXF **Exercice 23** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}{b-a}$.

IQY **Exercice 24** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est lipschitzienne.

F7Z **Exercice 25** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que $[a,b] \subset f([a,b])$. Montrer que f admet un point fixe.

7D9 **Exercice 26** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

494 **Exercice 27** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

1. Montrer que f est bornée.
2. Montrer que si f positive et $\ell = 0$ en $+\infty$, f admet un maximum.

YA5 **Exercice 28** Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère $P = X^3 + aX^2 + 1$. Pour quelles valeurs de a est-ce que P admet exactement trois racines réelles α, β, γ vérifiant $-1 < \alpha < 0 < \beta < 1 < \gamma$.

NKL **Exercice 29** Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^{f(x)} \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x$.

XJ8 **Exercice 30** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, et $\alpha > 0$ telle que $\forall x \geq 0,\ |f(x+1) - f(x)| \leq \alpha$. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \geq 0,\ f(x) \leq ax + b$.

MYH **Exercice 31** ★ [Oral ENS] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{2}\big(f(x+1) + f(x-1)\big) \geq f(x)$.
   Ind : *On peut l'interpréter comme une inégalité de convexité. Faire le dessin.*
2. ★ $\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{1}{4}\big(f(x+1) + f(x-1) + f(x+\pi) + f(x-\pi)\big) = f(x)$.

Continuité uniforme

UGV **Exercice 32** Montrer que $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

IXO **Exercice 33** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que f est UC.

WUF **Exercice 34** ★ Lemme de croft Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x > 0,\ f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

1. On suppose que f est uniformément continue, montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < \beta$ deux réels. Montrer que $\bigcup_{p \geq n}]p\alpha, p\beta[$ contient tous les réels assez grands.
   b) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ouverte et non majorée. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\{n\alpha,\ n \in \mathbb{N}\} \cap A$ soit infini.
   La partie A est ouverte si $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0,\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$.
   c) Montrer que la conclusion de 1) reste vraie sans l'hypothèse d'uniforme continuité.